XXI Olimpíada Matemática de la Cuenca del Pacífico

APMO

Marzo 2009

Duración: 4 horas *Cada problema vale 7 puntos*

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO. Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha. No se puede usar calculadora.*

Problema 1. Consideramos la siguiente operación que se aplica a números reales escritos en el pizarrón: Se elige un número r escrito en el pizarrón, se lo borra, y se escribe en el pizarrón dos números reales positivos a y b que satisfacen la condición $2r^2 = ab$.

Si se comienza con exactamente un número real positivo r en el pizarrón y se aplica la operación $k^2 - 1$ veces se termina con k^2 reales positivos, no necesariamente distintos. Demostrar que uno de los números del pizarrón es menor o igual que kr.

Problema 2. Sean a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 números reales que satisfacen la siguiente ecuación

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2} \text{ para } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Hallar el valor de $\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}$. (Expresarlo como una sola fracción.)

Problema 3. Sean $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ tres circunferencias del plano que no se cortan y son exteriores entre si. Para cada punto P del plano, exterior a las tres circunferencias, se construyen seis puntos $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ de la siguiente manera: Para cada i = 1, 2, 3, A_i, B_i son puntos distintos de la circunferencia Γ_i tales que las rectas PA_i y PB_i son ambas tangentes a la circunferencia Γ_i. Diremos que el punto P es *excepcional* si en la construcción, las tres rectas A_1B_1, A_2B_2 y A_3B_3 son concurrentes. Demostrar que todos los puntos excepcionales del plano, si existen, están en una misma circunferencia.

Problema 4. Demostrar que para todo entero positivo k existe una progresión aritmética de números racionales

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k},$$

donde a_i, b_i son enteros positivos coprimos para cada i = 1, 2, …, k, tales que los enteros positivos $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_k, b_k$ son todos distintos.

Problema 5. Larry y Rob son dos robots que viajan en un móvil de Argovia a Zillis. Los dos controlan el timón y siguen el siguiente algoritmo: Larry hace un giro de 90º a la izquierda cada ℓ kilómetros, desde la partida; Rob hace un giro de 90º a la derecha cada r kilómetros, desde la partida, donde ℓ y r son enteros positivos primos relativos. Si ambos giros se producen simultáneamente, el móvil continúa su marcha sin cambiar de dirección. La tierra es plana y el móvil se puede desplazar en cualquier dirección. El móvil sale de Argovia apuntando hacia Zillis. ¿Para qué elecciones del par (ℓ, r) el móvil llegará con certeza a Zillis, no importa cuan lejos esté de Argovia?